$\boxed{28/3/2018}$

**Άσκηση 1** Δείξτε ότι η $U(\mathbb{Z}_8)$ είναι ένωση τριών γνήσιων υποομάδων της.

**Άσκηση 2** Δείξτε ότι δεν υπάρχει ομάδα που να είναι ένωση δύο γνήσιων υποομάδων της.

**Λύση 2** Έστω $H_1 < G$ (1) και $H_2 < G$ (2)

και $G = H_1 \cup H_2$ (3)

Προφανώς: $H_1 \cup H_2$ είναι ομάδα!!!

$\longrightarrow \boxed{H_1 \subseteq H_2}$ ή $\boxed{H_2 \subseteq H_1}$

1η περίπτωση: $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow H_1 \cup H_2 \overset{(3)}{=} H_2 = G \overset{(2)}{\Longrightarrow}$ Άτοπο!!!

2η περίπτωση:

$H_2 \subseteq H_1 \Rightarrow H_1 \cup H_2 = H_1 \overset{(3)}{=} G \overset{(1)}{\Longrightarrow}$ Άτοπο!!!

Συνεπώς, δεν υπάρχει ομάδα που να είναι ένωση δύο γνήσιων υποομάδων της.

▸ Λύση [II]: Προφανώς $U(\mathbb{Z}_8)=\{[1]_8,[3]_8,[5]_8,[7]_8\}$

• Καθώς κάθε στοιχείο της $U(\mathbb{Z}_8)$, πέρα από το $[1]_8$, έχει τάξη 2, έπεται ότι αυτά θα παράγουν υποομάδες, ξένες μεταξύ τους.

• Συνεπώς:

$$U(\mathbb{Z}_8)=\langle[3]_8\rangle\cup\langle[5]_8\rangle\cup\langle[7]_8\rangle=$$

$$=\underbrace{\{[1]_8,[3]_8\}}_{\neq U(\mathbb{Z}_8)}\cup\underbrace{\{[1]_8,[5]_8\}}_{\neq U(\mathbb{Z}_8)}\cup\underbrace{\{[1]_8,[7]_8\}}_{\neq U(\mathbb{Z}_8)}$$

• Προφανώς και δεν είναι κυκλική, διότι $\nexists\,[x]_8\in U(\mathbb{Z}_8)$, τέτοιο ώστε:

$$\boxed{ord([x]_8)=4=|U(\mathbb{Z}_8)|}$$

▸ Άσκηση (a) $\underbrace{\langle\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\rangle}_{=A}\leq GL_2(\mathbb{R})$.

• Έχω: $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$

• Συνεπώς $A^{2k+1}=A,\ \forall k\in\mathbb{Z}$

και $A^{2k}=I_2,\ \forall k\in\mathbb{Z}$

• Άρα $\langle\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\rangle=\{I_2,\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\}$.

(8) • $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

• $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

• $B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

• $B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

⋮

$B^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, όπου $F_i$: αριθμοί Fibonacci

με: $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, ...

(1) $\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$, για $n > 2$

• Θα αποδείξω με ότι $B^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$

→ Έχω: $B^{n+1} = B^n \cdot B = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} F_{n+1}+F_n & F_{n+1} \\ F_n+F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$ Αποδείχθηκε!!!

• Άρα: $\langle B \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^0, \right\}$

$\boxed{\text{• Άσκηση}}$ $ord(x^{-1}\alpha x) \overset{1}{=} ord(\alpha) \Longrightarrow ord(\alpha * \beta) = ord(\beta * \alpha)$

• Έχω: $ord(\alpha*\beta) = ord\left((\alpha^{-1})^{-1} * \beta * \alpha * \alpha^{-1}\right) \overset{1}{=} ord(\beta * \alpha)$

$\boxed{\text{• Άσκηση 5 φυλλαδίου}}$

(α) • $1 \in T$. Άρα $|1| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$. Άρα $\boxed{T \neq \emptyset}$

• Για $z=0$, έχω $|0| = 0 \neq 1$. Άρα το $0 \notin T$.

Συνεπώς $\boxed{T \subseteq (\mathbb{C}^*, \cdot)}$

• Για $\alpha, \beta \in T$, έχω: $\alpha \in T \Rightarrow \boxed{|\alpha| = 1}$, $\beta \in T \Rightarrow \boxed{|\beta| = 1}$

Έχω: $|\alpha * \beta^{-1}| = |\alpha \cdot \beta^{-1}| = |\alpha| \cdot |\beta^{-1}| = |\alpha| \cdot \frac{1}{|\beta|} = \frac{1}{|\beta|} = \boxed{1}$.

Άρα $\boxed{\alpha * \beta^{-1} \in T}$

• Συνεπώς: $\boxed{T \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)}$

(β) • Έστω $z \in U \Rightarrow z^4 = 1 \Rightarrow |z^4| = |1| \Rightarrow |z|^4 = 1$

$\Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z \in T \Rightarrow \boxed{U \subset T}$

• Για $1 = e_T \in T$, έχω $1^4 = 1 \Rightarrow 1 \in U \Rightarrow \boxed{U \neq \emptyset}$

• Έστω $z_1, z_2 \in U \Rightarrow z_1 \in U$ και $z_2 \in U$

$\Downarrow$

$\boxed{z_1^{\nu} = 1}$ και $\boxed{z_2^{\mu} = 1}$

→ Έχω: $(z_1 \cdot z_2^{-1})^{\text{ΕΚΠ}[\nu,\mu]} = z_1^{\text{ΕΚΠ}[\nu,\mu]} \cdot (z_2^{-1})^{\text{ΕΚΠ}[\nu,\mu]}$

$= 1 \cdot 1 = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{z_1 \cdot z_2^{-1} \in U}$

• Άρα $\boxed{U \leq T}$

(γ) • Έχω: $\mu$ φυσικός $\Rightarrow U_\mu = \{z \in \mathbb{C} : z^{\mu} = 1\} \subseteq U$

• $1 \in U_\mu$, αφού $1^{\mu} = 1$, όπως $1 \in U \Rightarrow \boxed{U_\mu \neq \emptyset}$

• $z_1, z_2 \in U_\mu \Rightarrow \boxed{z_1^{\mu} = 1}$ και $\boxed{z_2^{\mu} = 1}$

→ Έχω: $(z_1 \cdot z_2^{-1})^{\mu} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\mu} = \frac{z_1^{\mu}}{z_2^{\mu}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

Άρα $\boxed{z_1 \cdot z_2^{-1} \in U_\mu}$

Συνεπώς: $\boxed{U_\mu \leq U}$

(δ) ▸ Απο το (γ), έχω: $U_\mu \leq U$, για κάποιο $\mu \in \mathbb{N}$.

Άρα $\boxed{\bigcup_{\mu=1}^{\infty} (U_\mu) \subseteq U}$

αγράφημα

• <u>Έστω</u>: $z \in U \Rightarrow \exists$ κάποιο $n$, τ.ω.: $\underline{z^n = 1}$

$$\longrightarrow z \in U_n \Rightarrow z \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n)}$$

• Άρα $\boxed{U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n)}$

β' ερώτημα ▸ $\underline{U_n} = \left\{ \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \;\middle|\; 0 \leq k \leq n-1 \right\} =$

$\underset{k=1}{=} \boxed{\langle \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \rangle}$

• Άρα η <u>$U_n$ είναι κυκλική</u>

γ' ερώτημα ▸ <u>Έστω</u> ότι η $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n)$ δεν είναι κυκλική. Θα καταλήξω σε <u>άτοπο</u>!

• Αφού $U$: κυκλική $\Rightarrow U = \langle \alpha \rangle \Rightarrow \alpha \in U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n)$

$\Longrightarrow \boxed{\alpha \in U_\lambda}$, για κάποιο $\underline{\lambda \in \mathbb{N}}$.

• <u>Έχω</u> $\alpha \in U_\lambda \xrightarrow[\text{με } \alpha \text{ γεννήτορα}]{U_\lambda:\text{ κυκλική}} \langle \alpha \rangle \subseteq U_\lambda \Rightarrow \boxed{U \subseteq U_n}$

Άτοπο!!!

• Άρα η $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n)$ δεν είναι κυκλική!!!